

3 囚人問題はなぜ難しいのか

— ベイズの定理を学習した学生の問題理解と解決 —

Why the Problem of Three Prisoners Is Difficult: Understanding and Solving the problem for students learning Bayes' Theorem

寺尾 敦

Atsushi Terao

青山学院大学

Aoyama Gakuin University

atsushi@si.aoyama.ac.jp

概要

統計学の入門講義を履修している 68 名の学生が、2 週の授業にわたって確率の基礎とベイズの定理を学習し、基本的なベイズ課題と 3 囚人問題に取り組んだ。基本的なベイズ課題を解決できる学習者にとっても、3 囚人問題の解決は難しかった。特に、問題文から尤度に関する情報を読み取ることに大きな困難があった。尤度情報を理解し、正しい問題表象を構築できれば、正解が得られる可能性は高い。

キーワード：確率判断(probability judgement)、ベイズの定理(Bayes' theorem)、3 囚人問題 (problem of three prisoners)

1. はじめに

確率判断において、数学的な規範解と人間の直観がしばしば異なることは、よく知られている。「3 囚人問題」[1]はそうした問題のひとつである。

3 囚人問題での人間の直観が正解と異なってしまうのはなぜなのか、すなわち、この問題の難しさはどこにあるのかについて、多くの議論がなされた[2]。たとえば、「主観的定理」という、人間が持っている素朴な確率推定方法の基礎にある命題的信念への依存が主張された。

3 囚人問題の難しさは、2つの部分に分けて考えるべきだろう。ベイズの定理を使う問題に共通する難しさと、3 囚人問題に特有の難しさである。確率推論の実験研究ではナイーブな学生を参加者とすることが多いが、そうするとベイズの定理を知っていても残る難しさはどこにあるのか不明になってしまう。

そこで本研究では、大学 1 年生を対象とした初等統計学のクラスで、ベイズの定理を学んだ学生が、3 囚人問題に対してどれほどのパフォーマンスを示すのか、どこに困難があるのかを検討した。算数文章題解決の研究を参考に、問題理解と解決の過程を分けて、困難がどこにあるのかわかるように工夫した。

2. 方法

2.1 参加者

青山学院大学社会情報学部の 1 年生必修科目「統計入門」は、3 クラスに分け、1 週あたり 180 分 (2 コマ続きの 90 分授業)、15 週の授業を行っている。筆者が担当する 1 クラスの受講登録者 78 名のうち、確率の学習を行った 2 回の授業 (2023 年 10 月 10 日, 10 月 17 日) の両方に出席した 68 名から得たデータを分析した。

2.2 材料

ベイズの定理を用いて問題を解けるようになることを目標に、2 週にわたって確率の授業が行われた。教科書に掲載されている例題と章末問題の他に、基本的なベイズ課題である「くじびき問題」と 3 囚人問題が用いられた。これらの問題を表 1 に示す。3 囚人問題では、問題理解についての 2 つの問いと、その後の解決の問いがひとつ用いられた。これら 3 つの問いを表 2 に示す。面積図の描画を求めた問 2 では図のテンプレートが提示された。正解例と共に図 1 に示す。

2.3 手続き

学習者は、ベイズの定理の講義に続いて、4 つの練習問題に取り組んだ。解決を助けるツールとして、樹形図と面積図の使用を訓練した。これらの図は、問題文から得た情報が統合された問題表象であるとともに、問題の解法を示唆するものである。

続いて学生は、くじびき問題と 3 囚人問題に取り組んだ。3 囚人問題では、最初に、問題文で暗黙的に示されている情報 (たとえば、囚人 A が釈放される時、看守がどのような確率でどのように答えるか) について質問がなされた。以下、この情報を「尤度情報」と呼ぶ。この問いの後、学生は面積図を描いて確率の計算を行った (最初の試み)。尤度情報についての問いの解答が提示され、学生はもう一度、面積図の描画と確率の計算を行った (2 回目の試み)。

表1 くじびき問題と3囚人問題

くじびき問題

くじびき遊びをします。くじ袋の中には、白箱と黒箱がひとつずつ入っています。白箱の中には赤いボール2個と青いボール1個、黒箱の中には赤いボール1個と青いボール1個が入っています。箱もボールもそれぞれ同形同大で、触っただけでは区別できません。袋の中の箱もその中のボールもよく混ぜてから、袋の中を見ないで手を入れ、まず箱をひとつ選び、さらに、選んだ箱の中から、箱の中を見ないで手を入れボール(くじ)をひとつ選びます。取り出したボールが赤なら当たりで、青ならはずれです。

いま、このくじびき遊びで、くじを引く人が当たりを引きました。このとき、その当たりくじが白箱からとったボールである確率はいくらですか。

3囚人問題

3人の囚人A, B, Cがいて、2人が処刑され1人が釈放されることがわかっている。それぞれの釈放される確率は、 $1/4$, $1/4$, $1/2$ であった。

だれが釈放されるか知っている看守に対し、囚人Aが、「BとCのうち、処刑される1人の名前を教えてください」と頼んだ。看守はしばし考えて、まあかまわないだろうと思い、「Bは処刑されるよ」と教えてやった。

この答えを聞いたあと、Aが釈放される確率はいくらになるか。

=看守が、BとCのうちから、「Bは処刑される」と答えた

ただし、看守はうそをつかないこと、囚人BとCがともに処刑される場合には $1/2$ ずつの確率でBかCの名前を答えることを仮定する。

表2 3囚人問題での3つの問い

問1：あなたは看守だと思ってください。いま、あなたは囚人Aから「BとCのうち、処刑される1人の名前を教えてください」とたずねられました。

囚人Aが「BとCのうち」と限定したのは、「あなた(A)は処刑されるよ」と言われたくないからです。

(1)【仮説：どんなとき】Aが釈放されるのだとしたら、あなた(看守)は囚人Aにどのように答えますか？ 以下の文の空白 [1] から [4] に、確率と、囚人の名前を入れてください。可能な答え方がひとつしかない場合は、そのように答える確率を1として、[3] と [4] は「空白」と記述してください。

【データ：何が起こる】確率 [1] で「[2] は処刑されるよ」と答え、確率 [3] で「[4] は処刑されるよ」と答える。

(2)【仮説：どんなとき】Bが釈放されるのだとしたら、・・・(以下、省略)

(3)【仮説：どんなとき】Cが釈放されるのだとしたら、・・・(以下、省略)

問2：問1への回答は、だれが釈放されるかという仮説と、その仮説のもとで得られるデータとなっています。設問1への回答から面積図を作成してください。正方形の左側に仮説を、正方形の中にデータを記述してください。

問3：問題で問われている、Aが釈放される確率を計算してください。

3.2 3囚人問題の理解

3囚人問題の尤度情報の理解を問う質問(問1)において、囚人Aが釈放される場合の看守の発言(確率 $1/2$ で「Bは処刑されるよ」と答え、確率 $1/2$ で「Cは処刑されるよ」と答える)を正しく解答できたのは29名(43%)であった。囚人Bが釈放される場合(確率1で「Cは処刑されるよ」と答える)と、囚人Cが釈放される場合(確率1で「Bは処刑されるよ」と答える)について正しく解答できたのは、それぞれ26名(38%)と25名(37%)であった。これら3つの場合にすべて正しく回答できたのは17名(25%)にすぎなかった。

基本的なベイズ課題であるくじびき問題の正解者59名に限ると、看守の発言を正しく解答できたのは、囚人A, B, Cが釈放される場合それぞれについて、28名(47%)、24名(41%)、23名(39%)であった。

3. 結果

3.1 基本的なベイズ課題の解決

68名のうち59名(87%)が、基本的なベイズ課題であるくじびき問題に正解した。面積図および樹形図を正しく描くことができたのは、それぞれ65名と66名であった。ほとんどの学生は、基本的なベイズの定理の問題を解くスキルを持って、3囚人問題に取り組んだと言える。

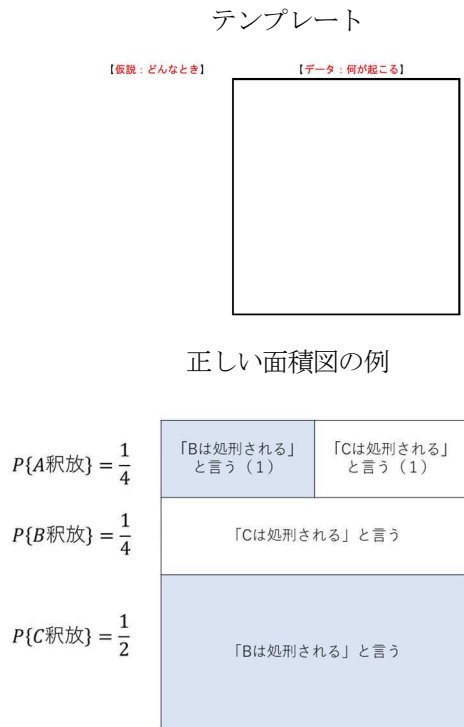


図1 面積図のテンプレートと正解例

この問いでの正答率がこれほど低いことは予想していなかった。結果の再現性を確認するために、ほぼ同一形式の問題に取り組んだ2022年のクラス58名のデータを分析した。囚人A, B, Cが釈放される場合の看守の発言を正しく解答できたのは、それぞれ24名(41%), 13名(22%), 10名(17%)であった。やはり正答率は低かった。

問題表象である面積図を描画する問い(問2)において、正しい面積図を描画できたのは、問1(尤度情報の理解)に解答した直後の最初の試みでは16名(24%)、問1の正解が提示された後の2回目の試みでは39名(57%)であった。基本的なベイズ課題であるくじびき問題の正解者59名に限ると、最初の試みでは16名(27%)、2回目の試みでは37名(63%)が正しい面積図を描画した。

尤度情報の理解と問題表象の構築との関係を検討するため、これら問いに対する正誤のクロス集計表を表3に示す。尤度情報を3人の囚人すべてについて尤度情報を理解できたときのみ、面積図の正解者(11名)が不正解者(6名)を上回っていた。尤度情報を正しく理解することは、正しい面積図を描くために必要であると言える。

表3 尤度情報の理解と面積図の正誤のクロス表

| 面積図 | 尤度情報の理解スコア | | | | 計 |
|-----|------------|----|---|----|----------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| 正解 | 2 | 3 | 0 | 11 | 16 (24%) |
| 不正解 | 27 | 12 | 7 | 6 | 52 (76%) |

3.3 3囚人問題の解決

3囚人問題で問われている確率を求める最初の試みでは、12名(18%)が正解(1/5)を与えた。尤度情報についての問いへの正解を提示した後の、2回目の解決の試みでは、23名(34%)が正解を与えた。基本的なベイズ課題であるくじびき問題の正解者59名に限ると、3囚人問題の解決の最初の試みで12名(20%)、2回目の試みで22名(37%)が正解を与えた。

問題理解と解決の関係を検討するため、面積図と3囚人問題の正誤のクロス集計表を表4に示す。解決の最初の試みでは、68名のうち16名(24%)が正しい面積図を描画し、そのうち12名が正しい確率を与えることができた。正しい面積図を描くことのできなかった52名は、だれも問題解決に成功しなかった。2回目の解決の試みでは、39名(57%)が正しい面積図を描画し、そのうち22名が正しい確率を与えることができた。正しい面積図を描くことのできなかった29名では、正しい確率を与えたのは1名だけであった。

図2に、3囚人問題(最初の試み)に正解するまでの関門と通過者数を示す。基本的なベイズ課題(くじびき問題)に正答できても、3囚人問題を正しく理解して問題表象を構築することはかなり困難である。しかし、もし正しい表象を構築できれば、正解を与えることのできる可能性はかなり高いと言える。

3囚人問題で問われている確率の誤りは非常に多様であった。解決の最初の試みでは17通りの誤答がなされた。比較的多かった誤答は1/3(9名)、1/4(6名)、3/8(5名)、1/2(4名)であった。2回目の解決の試みでは、正解と同じ1/5という結果になった誤答も含めて、17通りの誤答がなされた。比較的多かった誤答は1/4(9名)、1/3(5名)、1/8(4名)であった。これら誤答のうち、1/2、1/3、1/4という誤答はそれぞれ、確率推論の基礎にある「主観的定理」に基づくものとして知られている[1][2]。しかし、「主観的定理」の使用を読み取ることのできた答案はむしろ少なく、多様な解決過程の存在が示唆された。

表4 面積図と3囚人問題の正誤のクロス表

| 3囚人 | 面積図 | | 計 |
|-----|-----|-----|----------|
| | 正解 | 不正解 | |
| 1回目 | | | |
| 正解 | 12 | 0 | 12 (18%) |
| 不正解 | 4 | 52 | 56 (82%) |
| 2回目 | | | |
| 正解 | 22 | 1 | 23 (34%) |
| 不正解 | 17 | 28 | 45 (66%) |

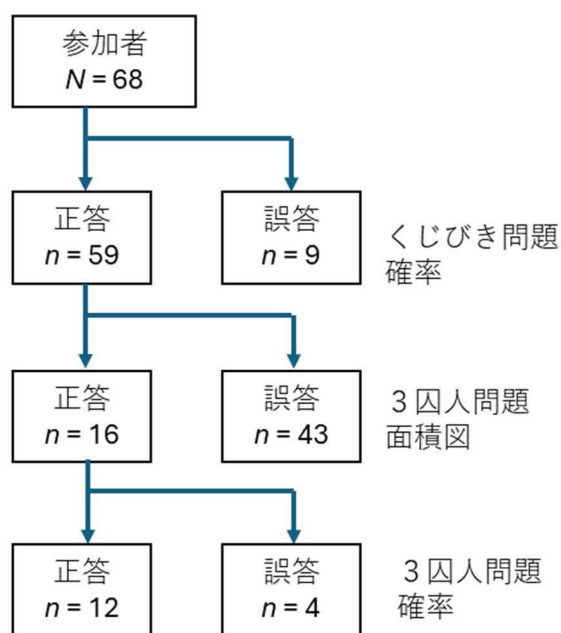


図2 3囚人問題に正解するまでの関門と通過者数

4. 考察

ベイズの定理を学習し、基本的なベイズ課題を解決できる学習者にとっても、3囚人問題は難しかった。とりわけ、尤度情報の理解と、面積図の描画から、問題理解の過程に困難があることが示された。

それでも、本研究での3囚人問題の正答率は、先行研究(せいぜい数パーセント[3][4])に比べてかなり高い。尤度情報を理解し、正しい問題表象を面積図として構築できれば、正しい確率が得られる可能性は高い。

3囚人問題では、よく知られた誤答(たとえば、 $1/4$ という「不変解」や、 $1/3$ という「等比率解」[2])の他にも、さまざまな解答がなされる[5]。本研究でも、誤答にはかなりのバリエーションがあった。これは主に問題理解表象のバリエーションに起因すると考えられる。実際、描かれた面積図にはさまざまなものがあっ

た。本研究で学生から得た答えは、日本語での記述なしに面積図と計算式が書かれたものが多く、なぜそのような面積図を描いたのか、実行する計算を面積図からどのように決めたのか、読み取ることが難しかった。日本語での記述を入れた答案の作成を求めるなど、今後の研究での方法を工夫したい。

算数文章題の解決過程の研究は問題理解の重要性を指摘してきた。本研究は同様の指摘をしており、文章題解決過程の研究と確率判断の研究との接点を示している。従来の確率判断の研究は、ヒューリスティックや「主観的定理」など、問題を理解した後の過程に注目することが多かった。3囚人問題でも、問題理解過程に困難があるという指摘はあったが[6][7]、本研究のようなデータに基づく検討は不十分だった。

3囚人問題の問題理解を困難にしている要素を明らかにしようとする試みは、確率判断の研究の進展に必ずしも貢献しないかもしれない。3囚人問題に固有の特殊な難しさではなく、他のベイズ課題にもあてはまる要素を明らかにしたい。たとえば、仮説とデータの時間的順序はそうした要素かもしれないと考えている。くじびき問題では箱の選択(仮説)がボールの取り出し(データ)よりも時間的に前だが、3囚人問題では看守の発言より後に実際の釈放(あるいは処刑)が行われる。直観的には「原因の確率」の方が困難に思えるが、そうではないのかもしれない。

謝辞

本研究はJSPS 科研費 JP20K03368, JP23K02866 の助成を受けたものです。

文献

- [1] 市川伸一・下條信輔, (1986) 直観的推論における“主観的定理”：“3囚人問題”の解決過程の分析から, 日本認知科学会第3回大会発表論文集, p.14.
- [2] 市川伸一, (1998) “確率の理解を探る—3囚人問題とその周辺—”, 共立出版
- [3] 繁杵算男, (1995) “意思決定の認知統計学”, 朝倉書店
- [4] 市川伸一・竹市博臣, (1987) “3囚人問題”のむずかしさはどこにあるか, 日本認知科学会第4回大会発表論文集, pp.22-23.
- [5] 高橋和弘・井原二郎, (1991) 3囚人問題と夕食問題のさまざまな解：実験的検討, 日本認知科学会第8回大会発表論文集, pp.66-67.
- [6] 佐伯胖, (1987) 「3囚人問題」に関する視点論的分析, 日本認知科学会第4回大会発表論文集, pp.26-27.
- [7] 竹市博臣, (1988) 3囚人問題の認知構造, 日本認知科学会第5回大会発表論文集, pp.90-91.