

生物性知覚の探究に向けて：4変量ベクトル自己回帰モデルの設計原理

Exploring Animacy Perception: Design Principle of Quad-variate Vector Auto-Regressive Model

日高 昇平[†]

Shohei Hidaka

[†] 北陸先端科学技術大学院大学

Japan Advanced Institute of Science and Technology

概要

人は運動からそれを生成する系の生物性などを知覚できる。しかし、どのような運動がそうした生物性知覚と関連するのか未解明な点が多い。本研究では、生物性や意図性等の運動知覚を検討する枠組みとして、相互作用する2点運動を生成するベクトル自己回帰 (VAR) モデルを提案する。VAR モデルの主要な統計量の一つであるグレンジャー因果を統制した時系列を生成する方法を開発するため、本稿では4変量 VAR モデルの数理を解析した。

キーワード：生物性知覚、ベクトル自己回帰モデル

1. はじめに

1.1 運動に対する生物性知覚

外見が生き物とはほど遠い単純な幾何学図形 (円や三角形) の動きに対しても、人は生き物らしさを感じることが知られている。Heider & Simmel [2] では、三つの幾何学図形 (大きな三角形, 小さな三角形, 小さな円) が長方形の近くを移動する動画を実験参加者に見せ、図形について説明させたところ、参加者は指示が与えられていないにも関わらず、内気やいじめっ子といった性格特性、および不満や怒りといった感情を図形に帰属させて説明を行った。このように、観察者が観察対象に対して生き物らしさを知覚することを生物性知覚 (Animacy perception) という。

1.2 VAR 運動生成法と生物性知覚実験

小熊ら [6, 7] や Hosokawa ら [4, 5] は Hidaka & Torii [3] の提案する2変量 VAR モデルの設計法を用いて生物性知覚の要因特定を目指した認知心理学実験を行った。これらの実験では、1次元上を運動する2点の運動を参加者に提示し、参加者はそのうち1点の運動に関してその生物性を評定する課題に取り組んだ。こ

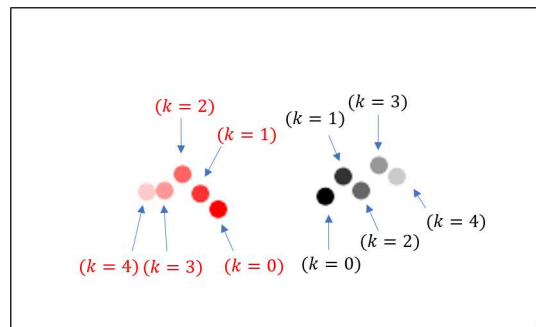


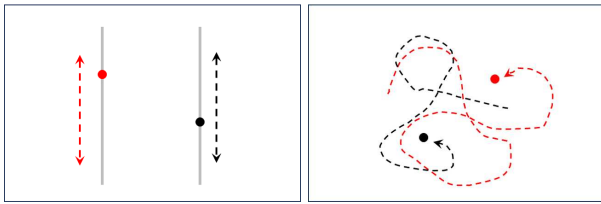
図 1: 小熊ら [7] の実験刺激の一例。k は離散時間を表し k = 4 は 4 ステップ過去, k = 0 が最新の点の位置を示す。

うして得られた生物性や意図性などの心理尺度に対して、提示した運動のもつグレンジャー因果量 [1] などの統計量との関係を分析することで生物性と関連する運動の特徴量を特定した。

1.3 VAR モデル設計における技術的課題

しかし、これらの先行研究で用いた2変量 VAR モデル [3] にはいくつかの方法論的な課題・限界がある。第一の課題は、2変量 VAR による運動生成法では、各点の運動を1次元上の運動に制限する必要がある (図 1)。こうした制限の下で生成した2点の運動は、同じ空間を共有して“交差”することがなく、異なる直線上を運動することになるため、2点間の相互作用を表現する上では自然な運動とは言い難い (図 2(a))。例えば、Heider & Simmel [2] が用いた動画のように“追いかっこ”を表現することはできない (図 2(b))。2変量 VAR モデルは2点間の運動における相互作用を調べるモデルとしては最小の統計的モデルの一つであるが、それゆえに提示可能な運動には強い制限がある。

第二の課題として、2変量 VAR による運動生成法では、独立には統制できないいくつかの交絡変数が生じ



(a) 2変量 VAR モデルで表現できる2点運動。 (b) 4変量 VAR モデルで表現できる2点運動。

図 2: VAR モデルでの運動生成。

る。2変量 VAR モデルは4変数のパラメータを持つが、2点の分散と共分散、そして定常分散と定常共分散、そして双方向のグレンジャー因果を含めると9つの統計量が存在する。この基本的な統計量以外にも、可能であれば統制することが望ましい統計量として自己共分散比や運動速度などがある。そのためグレンジャー因果を自由に統制しようとする、代わりに定常共分散などが強制的に特定の値を持つなどの交絡関係が生じてしまう。

以上で述べた2つの課題は、主に2変量 VAR モデルの自由パラメータが4つと十分ではないことに起因している。従って、単純に言えば、4変量や6変量 VAR モデルを用いれば、このような制限を解消でき、2次元上あるいは3次元空間上の運動を自由に生成できるように思える。しかし、高次の VAR モデルはまた別の技術的な問題を抱えている。それは、一般に n 変量 VAR モデルは、その次数によらず、リアプノフ方程式と呼ばれるモデルに内在する方程式を満たす必要があり、大きな n に対してこの方程式を解くことが難しいため、特定のパラメータに対応する時系列の統計量を算出することが困難になるからである。

まとめると、高すぎる次数の VAR モデルは統制が困難であるが、一方で低すぎる次数の VAR モデルには制限に由来する交絡関係が生じてしまう。そこで、本研究では、対称な2点運動の相互作用を表現可能であり、かつ交絡関係をほとんどもたない最小のモデルの一つとして4変量 VAR の数理を解析し、その設計原理を提示する。

2. VAR モデルの数理

2.1 n 変量 VAR モデルの定義

ある実ベクトル $\mu \in \mathbb{R}^n$ と正定値行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、各整数 $t = 0, 1, \dots$ に対してベクトル変量 ϵ_t が平均 $\mu \in \mathbb{R}^2$ 、共分散行列 Σ の多変量正規分布 $N(\epsilon_t | \mu, \Sigma)$ に従うとする。初期時点 $t = 0$ のベクトルを $v_0 = (v_{0,1}, v_{0,2}, \dots, v_{0,n})^\top$ とパラメータとして実行

$$\text{列 } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ が与えられ}$$

た場合、任意の整数 $t \geq 0$ に対してベクトル変量 v_t を以下のように定義する

$$v_{t+1} := Av_t + \epsilon_t. \quad (1)$$

つまり、ベクトル自己回帰 (VAR) モデルは組 (A, Σ, μ, v_0) は確率変数の半無限系列 $V = (v_0, v_1, v_2, \dots)$ を生成する。特に、後述の定常条件を満たすとき定常分布は v_0, μ に依存しないためパラメータ対 (A, Σ) により VAR モデルを定義する。

2.2 n 変量 VAR モデルの基本的な性質

n 変量 VAR モデルは、パラメータ行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ が $|\lambda_i| < 1$ を満たすとき、定常確率分布を持つ。本研究ではこの定常条件を仮定する。定常条件を満たす VAR モデルでは、定常確率分布が存在し

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(v_t | \mu_t, \Sigma_t) = N(v | \mathbf{0}_n, \hat{\Sigma}), \quad (2)$$

平均 $\mathbf{0}_n$ 、共分散行列 $\hat{\Sigma}$ を持つ。この $\hat{\Sigma}$ を定常共分散行列と呼ぶ。定常共分散行列は以下のリアプノフ方程式で求められる。

$$\hat{\Sigma} = \Sigma + A\hat{\Sigma}A^\top. \quad (3)$$

一方で、方程式 (3) の解 $\hat{\Sigma}$ が存在するとしても、それは必ずしも VAR モデルが定常条件を満たすことを意味しないことに注意が必要である。Hidaka & Torii[3] は、2変量 VAR の場合で、リアプノフ方程式の解が存在しても A が定常条件を満たさない場合を示している。

2.3 4変量 VAR モデルの定常共分散行列の統制

定常共分散行列 $\hat{\Sigma}$ は、VAR モデルにより生成される時系列が長期的に従う共分散行列であるため、運動知覚の実験刺激の提示を念頭におけば、基本的な運動の範囲に相当する。従って、多くの場合、定常共分散行列は異なる刺激・試行の間でも一定になっていることが望ましい。一方、共分散行列 Σ は各時間ステップで生成されるランダムネスであるため、これも2点

の運動の間で等しくなるなど事前に設定するのが望ましい。従って、リアプノフ方程式 (3) を、定常共分散行列 $\hat{\Sigma}$ と共分散行列 Σ を与えたときに係数行列 A を未知数として解く必要がある。このリアプノフ方程式 (3) は定常共分散行列と共分散行列の差 $\dot{\Sigma} := \hat{\Sigma} - \Sigma$ が正定値行列である場合のみ実係数行列 A の解が存在するため、これを前提条件として仮定した上で以下の議論を進める。結論から言えば、リアプノフ方程式 (3) の任意の解 A は、ある直交行列 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ と実正定値行列 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ のコレスキ行列 $(X)_C$ を用いて以下のように表される：

$$A = \left(\left(\hat{\Sigma} \right)_C \right)^\top R \left(\left(\hat{\Sigma} \right)_C \right)^{-1\top}. \quad (4)$$

ここで直交行列は $RR^\top = R^\top R = I_n$ (I_n は n 次元単位行列) を満たし、コレスキ行列 $(X)_C$ は $X = (X)_C^\top (X)_C$ を満たす上三角行列である。

2.4 4変量 VAR モデルのグレンジャー因果量の統制

VAR モデルにおける相互作用の主要な指標の一つがグレンジャー因果量 [1] である。グレンジャー因果量は n 次元ベクトル変数 $v = (u^\top, w^\top)^\top \in \mathbb{R}^n$ において、 $m < n$ 変数ベクトル $u \in \mathbb{R}^m$ と $n - m < n$ 変数ベクトル $w \in \mathbb{R}^{n-m}$ をそれぞれ結合変数とみなし、その間の時間遅れを考慮した相互作用を測る統計量である。特に $n = 2m$ で $u, w \in \mathbb{R}^m$ の場合、 $w \rightarrow u$ のグレンジャー因果量は

$$G_0 := \log \left| \Sigma_{0,0} - A_{0,1} S_0 A_{0,1}^\top \right| - \log \left| \Sigma_{0,0} \right|, \quad (5)$$

逆に $w \rightarrow u$ のグレンジャー因果量は

$$G_1 := \log \left| \Sigma_{1,1} - A_{1,0} S_1 A_{1,0}^\top \right| - \log \left| \Sigma_{1,1} \right|, \quad (6)$$

と定義される。ただし、 $|X|$ は正方形行列 X の行列式で、 $S_i := \hat{\Sigma}_{1-i,1-i} - \hat{\Sigma}_{1-i} \hat{\Sigma}_{i,i}^{-1} \hat{\Sigma}_{1-i}$ 、 $\Sigma_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 、 $\hat{\Sigma}_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ と $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ はそれぞれ共分散行列 Σ 、定常共分散行列 $\hat{\Sigma}$ と係数行列 A を構成するブロック行列である：

$$\Sigma =: \begin{pmatrix} \Sigma_{0,0} & \Sigma_{0,1} \\ \Sigma_{1,0} & \Sigma_{1,1} \end{pmatrix} \hat{\Sigma} =: \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{0,0} & \hat{\Sigma}_{0,1} \\ \hat{\Sigma}_{1,0} & \hat{\Sigma}_{1,1} \end{pmatrix} A =: \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

2.3 節で論じたように、 $\hat{\Sigma}$ (式 (5), (6) では S_0, S_1)、 Σ ($\Sigma_{0,0}, \Sigma_{1,1}$)、および G_0, G_1 を固定したときに A ($A_{0,1}, A_{1,0}$) を変数として方程式 (5) と (6) を解きたい。証

明・導出を割愛して結論だけ述べれば、これらの方程式の解は

$$A_{0,1} =: \begin{pmatrix} x_0^\top \\ y_0^\top \end{pmatrix}, \quad A_{1,0} =: \begin{pmatrix} x_1^\top \\ y_1^\top \end{pmatrix} \quad (8)$$

と表記すると、パラメタの組 $(u, \theta_0, \theta_1) \in [1, e^{G_0}] \times [0, 2\pi)^2$ を用いて

$$x_0 = \sqrt{(u-1)(\Sigma_{0,0})_{0,0}} \left((S_0)_C \right)^{-1} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$y_0 = \frac{\left((S_0)_C \right)^{-1}}{\sqrt{(\Sigma_{0,0})_{0,0}}} \left[(\Sigma_{0,0})_{1,0} \sqrt{u-1} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} + U_{G_0, u, \theta_1} \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} \right].$$

ただし

$$U_{G_0, u, \theta_1} := \left(\left| \Sigma_{0,0} \right| (e^{G_0} - u) U_{u, \theta_1}^{-1} \right)_C \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & u^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$U_{u, \theta_1} := \begin{pmatrix} u^2 \tan^2 \theta_1 + 1 & -(u-1) \sin \theta_1 \\ -(u-1) \sin \theta_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

対称性のため、 $\Sigma_{0,0} \rightarrow \Sigma_{1,1}$ 、 $S_0 \rightarrow S_1$ 、 $G_0 \rightarrow G_1$ に置き換えることで、 x_1, y_1 も同様に表現できる。

2.5 4変量 VAR モデルの同時統制

(8) は式 (5), (6) の解ではあるが、必ずしもリアプノフ方程式 (3) の解 (4) の形を満たさないことに注意する必要がある。すなわち最終的に求めたいのは (4) と (8) を同時に満たす係数行列 A である。

そのため、リアプノフ方程式 (3) をグレンジャー因果量に関する変数と関係ない変数に分離してブロック行列 $A_{0,0}, A_{0,1}, A_{1,0}, A_{1,1}$ により以下のように再表現する。

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \end{pmatrix} \hat{\Sigma} \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \end{pmatrix}^\top = \hat{\Sigma}_{0,0} - \Sigma_{0,0} =: \dot{\Sigma}_{0,0} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,0} & A_{1,1} \end{pmatrix} \hat{\Sigma} \begin{pmatrix} A_{1,0} & A_{1,1} \end{pmatrix}^\top = \hat{\Sigma}_{1,1} - \Sigma_{1,1} =: \dot{\Sigma}_{1,1}. \quad (11)$$

これはリアプノフ方程式 (3) の対角ブロックに相当する部分方程式である。この部分方程式は $A_{0,1}, A_{1,0}$ を変数として以下のように解ける。

$$A_{0,0} = -A_{01} \hat{\Sigma}_{1,0} \hat{\Sigma}_{0,0}^{-1} + g_0 (A_{0,1}) R_0 \left(\left(\hat{\Sigma}_{0,0} \right)_C \right)^{-1\top} \quad (12)$$

$$A_{1,1} = -A_{10} \hat{\Sigma}_{0,1} \hat{\Sigma}_{1,1}^{-1} + g_1 (A_{1,0}) R_1 \left(\left(\hat{\Sigma}_{1,1} \right)_C \right)^{-1\top}, \quad (13)$$

ただし $R_0, R_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ は任意の 2 次直交行列である。

最後に残っているリアプノフ方程式のブロックは以下の式で表される：

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \end{pmatrix} \hat{\Sigma} \begin{pmatrix} A_{1,0} & A_{1,1} \end{pmatrix}^\top = \hat{\Sigma}_{0,1}. \quad (14)$$

3. 結果のまとめ・整理

ここまで得られた結果を整理すると以下のようになる。

1. $\Sigma, \hat{\Sigma}, G_0, G_1$ を与えたときに、それを満たす係数行列 A を求めたい。
2. グレンジャー因果量 G_0, G_1 を与えたとき (8) で $A_{0,1}, A_{1,0}$ はそれぞれ (u, θ_0, θ_1) の 3 自由度のパラメタで表される。
3. $\Sigma, \hat{\Sigma}$ を与えたとき、リアプノフ方程式 (3) を満たす必要があり、 $A_{0,0}, A_{1,1}$ はそれぞれ (12), (13) の R_0, R_1 で自由度 1 のパラメタで表される。
4. リアプノフ部分方程式 (14) は 2×2 の行列であるため $A_{0,1}, A_{1,0}$ を変数とする 4 つの方程式を与える ($A_{0,0}, A_{1,1}$ は (12), (13) で $A_{0,1}, A_{1,0}$ の関数に置換できる)。

現時点では、4. のリアプノフ部分方程式の解析的な解は完全には得られていない。しかし、この方程式の一部を解くと、いずれも 2 次方程式に帰着できることが分かっている。そのため、4 つの 2 次方程式を同時に満たす解は、(存在すれば) 一般には 16 組存在することになる。ある条件を満たす $\Sigma, \hat{\Sigma}, G_0, G_1$ に対して数値計算によりリアプノフ部分方程式 (14) を解いた場合、16 組の解が同時に存在することを確認した。

4. 考察・展望

数値計算を援用してリアプノフ部分方程式 (14) を解くことで、望ましい VAR モデルを設計できる点は、本研究の貢献である。前述の部分的な解析解によって、元々 16 自由度をもつ係数行列 A が、わずか 4 自由度の変数まで問題を簡約化されている。16 自由度を持つ非線形方程式の解の空間を探索することは高性能な計算機を用いても困難であるが、4 自由度まで簡約化されていれば、現実的な時間で数値計算で解くことが可能になる。

数値計算の援用で解の存在を確認できたことで、1.3 節で述べた 2 つ技術的な課題を 4 変数 VAR モデルの設計により解消できることが示された。すなわち、4 変数 VAR モデルでは (1) 2 次元平面上の 2 点の自然な相互作用を表す運動を表現でき、(2) グレンジャー因果 G_0, G_1 と (定常) 共分散 $\Sigma, \hat{\Sigma}$ を完全に独立に統制することが可能である (モデルの制限上の交絡関係

がない)。これに加えて、さらに 4 自由度の変数が残されているため、例えば、2 点の平面運動の速さ (2 自由度) と 2 点の自己共分散比 (2 自由度) を追加的に統制できる可能性もあると考えられる。

本研究では 4 変数 VAR に焦点をあてて解析した。一般に $2n$ 変数の VAR モデルを考える場合でも、リアプノフ方程式のブロック化の手法は有効で、 $(2n)^2$ の自由度をもつ係数行列を $A_{0,0}$ と $A_{1,1}$ を $\frac{n(n-1)}{2}$ の自由度をもつ直交行列と n^2 の自由度をもつ $A_{0,1}, A_{1,0}$ へと簡約化でき $n(n-1) + 2n^2$ の変数へまで解ける。

一方、数値計算だけでは、どのような $\Sigma, \hat{\Sigma}, G_0, G_1$ に対していくつの解が存在するかはわからず、4 変数 VAR モデルを設計するための明確な枠組みや方針は得難い。そのため、最後に残されたリアプノフ部分方程式 (14) を解析的に解くことが今後の課題である。

謝辞

本研究は科研費基盤研究 B(一般) JP23H0369, 挑戦的研究 (萌芽) JP22K19790, JST さきがけ JP-MJPR20C9 の助成を受けて行われた。

文献

- [1] Granger, C. W. J., (1969) "Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods", *Econometrica*, Vol. 37, No. 3, pp. 424-438.
- [2] Heider, F., & Simmel, M., (1944) "An experimental study of apparent behavior", *The American Journal of Psychology*, Vol. 57, No. 2, pp. 243-259.
- [3] Hidaka, S., & Torii, T., (2021) "Designing Bivariate Auto-Regressive Timeseries with Controlled Granger Causality", *Entropy*, Vol. 23, No. 6, 742.
- [4] 細川 敦司, (2023) "アニマシー知覚に関連する動きの性質：時間的随伴性と速さの検討", 日本認知科学会第 40 回大会論文集.
- [5] 細川 敦司, (2024) "アニマシー知覚と動きの統計量の関係：多変量自己回帰モデルによる実験的検討" JAIST 学術研究成果リポジトリ.
- [6] Oguma, K., Torii, T., & Hidaka, S., (2021) "Animacy perception of a pair of movements under quantitative control of its temporal contingency: a preliminary study", *The 26th International Symposium on Artificial Life and Robotics*, GS12-1, pp.274-279.
- [7] 小熊 健一, (2021) "物体間の運動の予測可能性が生き物らしさの知覚に及ぼす効果の実験的検討" JAIST 学術研究成果リポジトリ.