情報構造におけるフォーカルポイントの定式化
Formulation of Focal Points in Information Structure

多田 由彦†
Yoshihiko Tada

† 中央大学
Chuo University
yoshihiko.tada.4@gmail.com

概要
本稿は標準的な状態空間モデルにおいて戦略の突出とフォーカルポイントを定式化する．フォーカルポイントを静学的にかつ数理的に分析した分野の１つとして可変フレーム理論があるが，フレームを用いた定式化はいささか冗長であるように感じられる．本稿では情報構造において抽象化して定式化することによってこの冗長さを省いた．さらに本稿はプレイヤーたちに与えられる情報集合によってフォーカルポイントの候補が絞られた時，その絞られた中からどれが最も各人の利得を高めるのかについて共有知識となっている場合には，そのフォーカルポイントをプレイすることを証明した．

キーワード：フォーカルポイント (focal point), 共有知識 (common knowledge)

1. はじめに

プレイヤーたちがコーディネーションゲームをプレイするとき，相手が特定の均衡に注目していることを信じて，意思決定を行うことがあるかもしれない．すべてのプレイヤーがその均衡に注目し，互いにそれを注目していることを信じている場合，そのような均衡を Schelling (1960) はフォーカルポイント (focal point) と名付けた． フォーカルポイントは多くの文献で参照される概念である．このフォーカルポイントを数理的にかつ静学的に定式化した研究分野の一つが可変フレーム理論 (variable frame theory) である．

可変フレーム理論は Bacharach (1993) で提案された理論であり，「フレーム」と呼ばれる属性を用いて，戦略集合上の分割を定義し，ある特定の戦略の突出 (salience) を表現することでフォーカルポイントについて議論を行おうとする．可変フレーム理論はコーディネーションゲームにおけるフォーカルポイントに関して極めて示唆的な結論を導き出しており，今後の研究の発展も期待される．その一方で可変フレーム理論はある種の冗長さを感じる．モデルの分析者は各プレイヤーが持っている戦略を「フレーム」という概念を使い分けて解釈し，分類するが，本質的には戦略集合を分割して特定の戦略の突出を表現しているに過ぎない．

そこで本稿ではフレームは用いず標準的な情報構造モデルを用いて戦略の突出とフォーカルポイントの定式化を試みる．我々は情報構造モデルにおける状態空間上の各状態には，それぞれのプレイヤーにとってどの戦略が突出しているのかが記述されていると解釈する．この時，各プレイヤーは受け取った情報集合からすべてのプレイヤーにとって共通で突出している戦略を見つけ出し，フォーカルポイントを見つけ出そうとするだろう．フォーカルポイントはナッシュ均衡の１つであるが，どのナッシュ均衡がフォーカルポイントになるかは，すべてのプレイヤーの間でどのナッシュ均衡が突出していると認識しているのかの信念に依存することは明らかである．したがって，本稿はある特定の戦略がすべてのプレイヤーにとって突出していることが共有知識となっている場合に，その戦略をフォーカルポイントと名付けることにする．さまざまなフォーカルポイントの候補があったとしても，プレイヤーたちが入手する情報集合によってはその候補が絞られることがあるかもしれない．本稿は主要定理として，そうして絞られた候補の中で，すべてのプレイヤーの利得を最も高めるフォーカルポイントの候補が実際にプレイされうることを示す．

2. 準備

まず (標準形) ゲーム $G=(I,\{S_i\}_{i\in I},\{u_i\}_{i\in I})$ を定義する．I をプレイヤー集合，任意の $i\in I$ に対して，S_i を i の戦略集合，$S=\times_{i\in I} S_i$ を戦略プロファイルの集合，$u_i: S\to\mathbb{R}$ を i の効用関数とおく．ここで純粋戦略ナッシュ均衡を定義する．

定義１ G において $s^*\in S$ が純粋戦略ナッシュ均衡出るとは，任意の $i\in I$ と $s_i\in S_i$ に対して，$u_i(s^*)\geq u_i(s_i,s^*_{-i})$ を満たすことである，ここで S^{NE} を純粋戦略ナッシュ均衡の集合とする．

続いて G における各 i の情報構造 (Ω, Π_i) とする. Ω を状態空間, 各 i の Ω 上の分割を $\mathcal{Q}_i$ とおき, $\Pi_i: \Omega \to 2^{\Omega} \setminus \{\emptyset\}$ を i の情報関数とする. この時, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\Pi_i(\omega) \in \mathcal{Q}_i$ である. Π_i は以下の条件を満たすと仮定する.

C1 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, $\omega \in \Pi_i(\omega)$.

C2 任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して, $\omega' \in \Pi_i(\omega)$ ならば, $\Pi_i(\omega') = \Pi_i(\omega)$.

ここで $\bigvee_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ をすべてのプレイヤーの Ω 上の coarsest common refinement な分割の結び (join) とし, $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ を Ω 上の finest commo coarsening な分割の交わり (meet) とする. ここで $\widehat{\Pi}: \Omega \to 2^{\Omega}$ を finest common coarsening な分割の関数とし, ω を含む分割の交わりの要素を $\widehat{\Pi}(\omega) \in \bigwedge_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ と記す.

$\mu: 2^{\Omega} \to [0,1]$ をΩ 上の共通事前確率とする.

最後に, 共有知識 (common knowledge) を次のように仮定する.

定義２ $F \subseteq \Omega$ が ω で自明 (self-evident) であるとは, すべての i に対して, $\Pi_i(\omega) \subseteq F$ が成立することである. $E \subseteq \Omega$ が ω で共有知識であるとは, $\omega \in F \subseteq E$ を満たす自明な F が存在することである.

3. 戦略集合上の分割

本節では戦略集合上の分割を定義する. まず $\mathbb{P}$ を S 上の分割の集合とする. 任意の $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ は S 上の分割であり, 分割の各要素 $P \in \mathcal{P}$ は $P \subseteq S$ を満たす. ここで i の注目関数 $\pi_i: \Omega \to \mathbb{P}$ を定義する, これは $\omega \in \Omega$ で i が注目している S 上の分割は $\pi_i(\omega) \in \mathbb{P}$ であると解釈する, 以下では各 i の π_i は共有知識になっていると仮定する. これは各プレイヤーが他のプレイヤーの戦略集合の分割がどうなっているかを推論することが可能になることを意味する. すなわち ω は各プレイヤーの戦略集合上の分割についても記述されていると解釈することができる.

ここで任意の ω と i に対して, $P_i^{\omega}: S \to 2^S \setminus \{\emptyset\}$ を取る. これは ω での各戦略 s がどのような分割の要素になっているのかを表したものであり, 定義より $P_i^{\omega}(s) \in \pi_i(\omega)$ となる. ここで P_i^{ω} は以下の性質を満たすと仮定する.

P1 任意の $s \in S$ に対して, $s \in P_i^{\omega}(s)$.

P2 任意の $s, s' \in S$ に対して, $s' \in P_i^{\omega}(s)$ ならば, $P_i^{\omega}(s') = P_i^{\omega}(s)$.

4. フォーカルポイント

本節では突出 (salience) とフォーカルポイント (focal point) を定義する. まず突出は以下のように定義される.

定義３ G において $s^* \in S$ が ω で i にとって突出しているとは, $s^* \in S^{NE}$ であり, かつ s^* が以下の条件を満たすことである：任意の $s \in S^{NE}$ に対して,

- ◆ $s \notin P_i^{\omega}(s^*)$；
- ◆ $s' \in P_i^{\omega}(s)$ であるような $s' \in S^{NE} \setminus \{s\}$ が少なくとも１つ存在する.

これはある戦略 s^* が ω で i にとって突出している時, s^* がナッシュ均衡であり, s^* を含む分割の要素には他のナッシュ均衡が含まれておらず, s^* 以外のナッシュ均衡を含む分割の要素には２つ以上のナッシュ均衡が属していることを意味する,

続いて共有突出 (common salience) を定義する,

定義４ G において $s^* \in S$ が ω で共有突出であるとは, すべてのプレイヤー i にとって s^* が ω で突出していることである.

各プレイヤーの注目関数 π_i は共有知識となっているので, プレイヤーたちは ω で共有突出となっている戦略を推論で導き出すことができる. したがって, Ω 上の各状態 ω は, それぞれのプレイヤーにとってどの戦略が突出しているのかが記述されていると解釈することができる.

続いて $s^f: \Omega \to S \cup \{\phi\}$ をとり, $s^f(\omega) = \left(s_i^f(\omega)\right)_{i \in I}$ を ω での共有突出とする. また ω で共有突出が存在しない場合は, $s^f(\omega) = \phi$ と記す. そして $S^f = \{s^f(\omega) \in S \,|\, \omega \in \Omega \wedge s^f(\omega) \neq \phi\}$ を共有突出の集合とする.

最後にフォーカルポイントを定義する. フォーカルポイントはナッシュ均衡であるが, どのナッシュ均衡がフォーカルポイントとなるかは各プレイヤーがどのナッシュ均衡が共有突出であると認識しているのかに依存する. ここで各状態 ω は各プレイヤーの戦略集合上の分割や共有突出について記述がされているわけであるから, どれがフォーカルポイントとなるのかも併せて推論することが可能である. このとき, フォー

カルポイントは次のように定義される.

定義５ G において $s^* \in S$ が $\omega \in \Omega$ でフォーカルポイントであるとは, s^* が ω で共有突出となっており, かつそれが共有知識となっていることである.

本稿のフォーカルポイントの定義には利得の条件を含めていない. これはパレート劣位なナッシュ均衡がフォーカルポイントになる可能性を認めるためである.

以下では $s^f(\omega)$ をフォーカルポイント戦略とよび, フォーカルポイント戦略に対するプレイヤーたちの期待効用について考える. ここで $\omega \in \Omega$ を与えたときに, $s^f(\omega)$ であるならば, 任意のプレイヤー $i \in I$ と $s_i \in S_i$ に対して,

$$u_i(\phi) = \frac{\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sum_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})}{|S|}$$

とする. これはフォーカルポイントがない場合, すべてのプレイヤーがランダムにプレイした場合の i の期待効用となる. ここで, i が s^* に注目し, 他のプレイヤーは ω で $s^f(\omega)$ に注目した時, i が s_i^* をプレイした場合の期待効用は,

$$Eu_i(s_i^*) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\{\omega\}) \cdot u_i\left(s_i^*, s_{-i}^f(\omega)\right)$$

となる. なお, $s^f(\omega) = \phi$ の時の i の戦略 $s_i^f(\omega) = \phi_i$ については i は S_i 上の戦略をランダムにプレイしているものと考え,

$$Eu_i(\phi_i) = \sum_{s_i \in S_i} \frac{Eu_i(s_i)}{|S_i|}$$

とする. この時以下の命題が成り立つ.

命題１ 任意の $\Gamma = (G, \Omega)$ において, Ω 上の共有事前確率 μ が存在し, 各プレイヤーの Ω 上の分割が共有知識になっていると仮定する. ある $\omega \in \Omega$ が与えられた時, s^* が ω で共有突出となっており, かつ任意の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$ $(\omega' \neq \omega)$ と任意の i に対して $Eu_i(s_i^*) \geq Eu_i\left(s_i^f(\omega')\right)$ であることが共有知識になっているならば, s^* は ω で最適である.

この命題は真の状態におけるフォーカルポイントが必ずプレイされることを意味するわけではない. あくまでも真の状態 ω において, ω でのフォーカルポイントが最適な解の１つになることを意味しているに過ぎない. これは ω を含む finest common coarsening な分割の要素 $\widehat{\Pi}(\omega)$ から別の要素 ω' を取り出した時, その ω' でのフォーカルポイントを選択する時に得られる期待利得が ω でのフォーカルポイントを選択するときに得られる期待利得と同じ場合には, 均衡選択の問題が残ってしまうことを暗に示している. 言い換えれば, 真の状態でのフォーカルポイントが一意の解になり得るとは限らないことを意味している.

しかしながら, ω でのフォーカルポイント戦略を選ぶことが他の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$ でのフォーカルポイント戦略を選ぶことよりも期待利得を厳密に高めることができるならば, ω でのフォーカルポイント戦略は一意の解になりうることは明らかである. したがって以下の定理は明らかに成り立つ.

定理１ 任意の $\Gamma = (G, \Omega)$ において, Ω 上の共有事前確率 μ が存在し, 各プレイヤーの Ω 上の分割が共有知識になっていると仮定する. ある $\omega \in \Omega$ が与えられた時, s^* が ω で共有突出となっており, かつ任意の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$ $(\omega' \neq \omega$ かつ $s^f(\omega') \neq s^*)$ と任意の i に対して $Eu_i(s_i^*) \geq Eu_i\left(s_i^f(\omega')\right)$ であることが共有知識になっているならば, s^* は ω で最適である.

この定理では, ω' でのフォーカルポイント $s^f(\omega')$ が ω でのフォーカルポイント s^* と比べてパレート優位であったとしても, $\omega' \notin \widehat{\Pi}(\omega)$ である場合, 各プレイヤーが $s_i^f(\omega')$ をプレイすることは最適にはなり得ないので, パレート列否フォーカルポイント s^* がプレイされうる余地を残している.

この定理は一意のフォーカルポイントを推論によってプレイしうることを主張している点で Casajus (2000) と Janssen (2001) の定理を一般化したものであるように感じるかもしれない. しかしながら, Casajus (2000) ではフォーカルポイントを一意に定義しているのに対して, 本稿はフォーカルポイントの候補が複数存在したり, あるいは存在しなかったりすることを認めている. その上で定理１は複数のフォーカルポイントの候補の中から実際にプレイされるフォーカルポイントがただ１つに決まることを示している点で彼らの研究とは本質的には異なっている.

5. 結論

本稿では突出とフォーカルポイントを静学的に定義

し，ある状態でのフォーカルポイントが共有知識になっていること，その状態でのフォーカルポイント戦略が同じ情報集合における他の状態のフォーカルポイント戦略と比べてパレート優位になっていることが共有知識になっているならば，すべてのプレイヤーがフォーカルポイントを選択することを証明した．本稿のアプローチは可変フレーム理論とは異なるが，フレームと呼ばれるラベルの集合を用いずにフォーカルポイントを抽象的にかつ静学的に定義することができた．また可変フレーム理論で証明された一意の均衡のプレイとは本質的には異なる一意のフォーカルポイントのプレイについて，同意定理を用いた証明を提示した．

本稿の主要定理は一見すると Aumann and Brandenburger (1995) が示した予備的観察を焼き直したもの，あるいはその劣化版のように見えるかもしれない. Aumann and Brandenburger (1995) では相互作用的信念体系 (interactive belief system) と呼ばれる枠組みを用いて，均衡のプレイについての条件を分析した．このとき彼らの予備的観察では「すべてのプレイヤーが合理的であり，自身の利得関数を知っていて，他のプレイヤーの選択を知っているならば，その時のプレイヤーたちのプレイはナッシュ均衡になる」ことが示された．この予備的観察では我々の定理１とは異なり共有知識を仮定していない点で，我々の定理１は彼らの予備的観察よりも劣化しているように感じるかもしれない．しかしながら Aumann and Brandenburger (1995) では状態空間上の状態について，どのプレイヤーが何を選択するのかについてまで記述されていることを仮定しているのに対して，我々の状態空間上の状態は，あくまでどの戦略がフォーカルポイントとなりうるのかのみを記述している．したがって，ある特定の状態を与えられたからといって直ちにその状態から他のプレイヤーの行動を予想できるわけではなく，他のプレイヤーの行動を予想するためには，さらに推論を重ねなくてはならない．すなわち，我々の情報構造モデルは Aumann and Brandenburger (1995) の相互作用的信念体系とは異なっている．

ただし，本稿にはいくつかの課題がある．本稿のモデルの場合，ナッシュ均衡の数が２個しかない場合には定義上フォーカルポイントが存在しないことになっている．これは一度きりのゲーム的状況に突然直面した場合に，判断材料がないために特定の均衡戦略に着目することができないようなケースを反映していると解釈できるかもしれない．しかし Schelling (1960) では被験者に表か裏かを選ばせてパートナーと同じものを選んだ場合には報酬がもらえるような実験において，表を選ぶ被験者が多かったことを実験で示している．また繰り返し的な状況であれば，ナッシュ均衡が２個しかない場合でも学習によって特定の均衡がフォーカルポイントとなることがありうるかもしれない．そうした場合，本稿での定式化とどのように整合性を取るのかが重要な点となるだろう．

また Charness and Sontuoso (2023) のように他のプレイヤーの戦略集合の分割についての無知を加味する必要があり，本稿で用いられている標準的な状態空間モデルを Heifetz, Meier, and Schipper (2013) が提案した不可知信念構造モデル (unawareness belief structure) に置き換えて分析していくことも視野に入れる必要があるだろう. Charness and Sontuoso (2023) のモデルは具体例を用いた分析にとどまっているが，無知とフォーカルポイントとの関係について「知識の節約」という観点から極めて重要な点をついているように思われる．これらの点を今後の課題として取り組んでいきたい．

文献

Aumann, R.J., and Brandenburger, A., (1995). Epistemic Conditions for Nash Equilibrium, *Econometrica*, 63, 1161-1180.

Bacharach, M., (1993). Variable Universe Games, in K. Binmore, A. Kirman, P. Tani (Eds.), *Frontiers of Game Theory*, MIT Press, 255-276.

Charness, G., and Sontuoso, A., (2023). The doors of perception: Theory and evidence of frame-dependent rationalizability, *American Economic Journal: Microeconomics*, 15, 309-344.

Casajus, A., (2000). Focal Points in Framed Strategic Forms, *Games and Economic Behavior*, 32, 263-291.

Heifetz, A., Meier, M., and Schipper, B.C., (2013). Unawareness, Beliefs, and Speculative Trade, *Games and Economic Behavior*, 77, 100-121.

Janssen, M.C.W., (2001). Rationalizing focal points, *Theory and Decision*, 50, 119-148.

Schelling, T.C., (1960), *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press. (河野勝監訳『紛争の戦略：ゲーム理論のエッセンス』2008 年、勁草書房)